

УДК 629.7(05):517.001.2(082)

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ЦЕНТРАЛИЗОВАННОЙ СИСТЕМЫ ЗАПРАВКИ ВОЗДУШНЫХ СУДОВ ТОПЛИВОМ НА АЭРОДРОМЕ

А.А ИВАНОВ, Ю.Н. ПИРОГОВ, Н.Е. СЫРОЕДОВ

Статья представлена доктором технических наук, профессором Коняевым Е.А.

В целях оптимизации состава, структуры и технических характеристик систем централизованной заправки воздушных судов топливом предложена методика оценки их эффективности с использованием аналитической модели на базе Марковского математического аппарата теории массового обслуживания в стационарном и переходном режимах. Приведен пример реализации модели при различных исходных данных по количеству постов заправки, интенсивности вылетов, времени заправки.

Математические методы в авиационной практике находят широкое применение при решении широкого круга задач планирования и управления хозяйственной деятельностью предприятий гражданской авиации [1, 2], в частности и в исследованиях по обоснованию эффективности систем централизованной заправки топливом (ЦЗТ) воздушных судов (ВС) [3, 4].

Исходя из случайного характера процесса обеспечения заправки ВС топливом, его математическая модель должна быть вероятностной. В формализованном виде сам процесс заправки может быть представлен как разомкнутая система массового обслуживания (СМО) [5, 6], в которой обслуживающими приборами являются заправочные агрегаты (ЗА) централизованной системы заправки ВС топливом на аэродроме. Размеченный граф [5, 6] возможных состояний такой системы с n ЗА на аэродроме представлен на рис. 1.

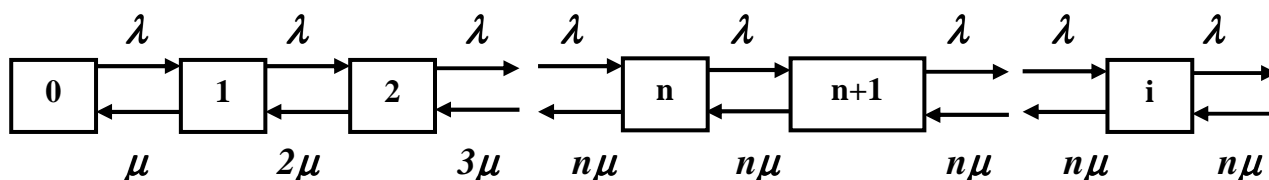


Рис. 1. Размеченный граф состояний разомкнутой СМО с одиночным поступлением заявок на обслуживание

Состояния системы имеют следующий смысл:

0 – система простаивает, на заправке нет ВС, все n ЗА свободны;

1 – 1 ВС заправляется, $n-1$ ЗА свободны;

2 – 2 ВС заправляется, $n-2$ ЗА свободны;

n – n ВС заправляется, все n ЗА заняты заправкой;

$n+1$ – n ВС заправляется, 1 ВС ожидает заправки в очереди;

i – n ВС заправляется, $(i - n)$ ВС ожидает заправки в очереди.

Входные формальные параметры СМО включают:

λ – интенсивность требований ВС на заправку – среднее число посадок ВС на аэродром в

единицу времени $\lambda = \frac{1}{(t_{\text{на}})}$, ед. в час;

μ – интенсивность обслуживания (заправки) – среднее число ВС, заправляемых одним ЗА в единицу времени $\mu = \frac{60}{(\tau_{\text{за}})}$, ед. в час,

где $t_{св}$ - средний интервал времени между заправками (прилётом) ВС, ч;
 $\tau_{об}$ - среднее время обслуживания (заправки) одного ВС, равное

$$\tau_{об} = \tau_3 + t_n + t_p + t_c,$$

где t_n - среднее время подхода ВС к ЗА, мин.;
 t_c - среднее время подсоединения ЗА к ВС, мин.;
 t_p - среднее время отсоединения ЗА от ВС, мин.;

τ_3 – нормативное («чистое») время заправки одного ВС, мин $\tau = \frac{V_{\dot{E}A}}{q}$

где $V_{\dot{L}A}$ - объём дозаправки ВС топливом, л;
 q – средняя расчётная производительность заправки ВС, л/мин.

Для представленного на рис. 1 графа может быть составлена система дифференциальных уравнений Колмогорова [5, 6] для вероятностей состояний:

$$\begin{aligned} dP_0/dt &= -\lambda \cdot P_0 + \mu \cdot P_1, \\ dP_i/dt &= -(\lambda + i \cdot \mu) \cdot P_i + \lambda \cdot P_{i-1} + (i+1) \cdot \mu \cdot P_{i+1} \quad \text{ï ðè } 0 < i < n, \\ dP_n/dt &= -(\lambda + n \cdot \mu) \cdot P_n + \lambda \cdot P_{n-1} + n \cdot \mu \cdot P_{n+1} \quad \text{ï ðè } i \geq n. \end{aligned}$$

С экстремальными начальными условиями:

- либо $P_0 = 1; P_i = 0$ – все ЗА свободны, а все ВС заправлены топливом;
- либо $P_k = 1; P_i = 0$, когда k ВС нуждаются в заправке топливом ($k > n$).

Расчёт текущих значений вероятностей состояний (переходный режим) представляет интерес только в том случае, когда процесс рассматривается на коротком интервале времени, например, при скоплении очереди ВС на заправку после отказа системы ЦЗТ на какое-то время или когда значения λ и μ непостоянны во времени [5, 6].

В случае постоянства во времени значений λ и μ на длительном интервале времени имеет место стационарный (установившийся) режим, на котором производные вероятностей состояний dP_i/dt равны нулю, а система дифференциальных уравнений превращается в систему обыкновенных линейных уравнений [5, 6], для которых выведены достаточно простые расчётные формулы для вероятностей состояний и параметров эффективности функционирования системы в целом [5].

$$\begin{aligned} -\lambda \cdot P_0 + \mu \cdot P_1 &= 0, \\ -(\lambda + i \cdot \mu) \cdot P_i + \lambda \cdot P_{i-1} + (i+1) \cdot \mu \cdot P_{i+1} &= 0 \quad \text{ï ðè } 0 < i < n, \\ -(\lambda + n \cdot \mu) \cdot P_n + \lambda \cdot P_{n-1} + n \cdot \mu \cdot P_{n+1} &= 0 \quad \text{ï ðè } i \geq n. \end{aligned}$$

Такой вариант является наиболее вероятным при обеспечении полётов на длительном интервале времени. Условием минимальной достаточности пропускной способности системы ЦЗТ является соблюдение строгого неравенства $\lambda / (n \cdot \mu) < 1$. Кроме того, средние затраты времени на заправку одного ВС с учётом ожидания в очереди, равные сумме времени заправки и времени ожидания, не должны превышать установленного план - графиком подготовки ВС к вылету с вероятностью не ниже заданной. Если это требование не выполняется, то необходимо либо сокращение времени обслуживания - $\tau_{об}$, либо увеличение числа ЗА - n .

Таким образом, модель может быть использована для обоснования требований к заправочным характеристикам ЗА (при $n = \text{const}$) или решения технико-экономической задачи оптимизации потребности в ЗА и сокращения затрат на обеспечение полётов при заданных заправочных характеристиках ЦЗТ, в том числе при переменных интенсивностях полётов и объёмах дозаправки.

При решении задачи в переходном режиме расчёт параметров функционирования ЦЗТ производится в виде математического ожидания случайных величин через значения вероятностей состояний системы (P_i), определяемых в процессе решения дифференциальных уравнений.

В стационарном режиме вероятности состояний системы определяются по формулам [7]:
Вероятность отсутствия на аэродроме нуждающихся в заправке ВС:

$$P_0 = \left\{ \sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{1}{k!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k + \frac{\mu \cdot (\lambda/\mu)^n}{(n-1)! \cdot (n \cdot \mu - \lambda)} \right\}^{-1}.$$

Вероятности, что на аэродроме (в т.ч. в очереди) находится "k" ВС, P_k :

$$P_k = P_0 \cdot \frac{(\lambda/\mu)^k}{n! \cdot n^{k-n}}, \text{ при } k \geq n; \quad P_k = P_0 \cdot \frac{(\lambda/\mu)^k}{k!}, \text{ при } 1 \leq k \leq n.$$

Вероятность того, что все ЗА ЦЗТ заняты заправкой ВС, $P_{\text{вз}}$:

$$P_{\text{вз}} = P_0 \cdot \frac{\mu \cdot (\lambda/\mu)^n}{(n-1)! \cdot (n \cdot \mu - \lambda)} \text{ или } P_{\text{вз}} = \sum_{i=n}^{\infty} P_i.$$

Вероятность того, что время ожидания ВС заправки больше t , $P_{\{\beta>t\}}$:

$$P_{\{\beta>t\}} = P_{\text{вз}} \cdot \exp[-(n \cdot \mu - \lambda) \cdot t].$$

Среднее время ожидания ВС заправки, $T_{\text{ож}}$:

$$T_{\text{ож}} = \frac{P_{\text{вз}}}{n \cdot \mu \cdot \lambda}.$$

Среднее число ВС, ожидающих заправки (в очереди), M_1 :

$$M_1 = P_0 \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^{n+1} \cdot \left[n \cdot n! \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n \cdot \mu} \right)^2 \right]^{-1} \text{ или } M_1 = \sum_{i=n+1}^{\infty} i \cdot P_i.$$

Среднее число ВС на аэродроме (в очереди и заправляемых), M_2 :

$$M_2 = M_1 + \frac{n \cdot P_n}{1 - \lambda/(n \cdot \mu)} + P_0 \cdot \sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{1}{(k-1)!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k \text{ или } M_2 = \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot P_i.$$

Среднее число ЗА, занятых заправкой ВС на аэродроме, M_4 :

$$M_4 = \sum_{i=1}^{i=n} i \cdot P_i + n \cdot \sum_{i=n+1}^{\infty} P_i.$$

Среднее число свободных ЗА на аэродроме, M_3 :

$$M_3 = P_0 \cdot \sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{n-k}{k!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k \text{ или } M_3 = n - M_4.$$

Средняя подача средств перекачки топлива в системе ЦЗТ, $Q_{\text{ср}}$:

$$Q_{\text{ср}} = q \cdot \sum_{i=1}^{i=n} i \cdot P_i.$$

Распределение подачи средств перекачки в системе ЦЗТ, $Q_k = f(P_k)$:

$$Q_k = q \cdot k,$$

где k - число одновременно заправляемых ВС в системе ЦЗТ, а P_k - вероятность данного события.

На графиках рис. 2 - 5 приведены данные расчёта параметров функционирования ЦЗТ по результатам моделирования процесса при различных исходных данных, иллюстрирующие некоторые возможности предлагаемой математической модели по анализу и обоснованию состава и основных технических характеристик централизованных систем заправки самолётов на аэродромах.

На рис. 2 представлены графики зависимости основных параметров ЦЗТ от числа заправочных агрегатов в системе при фиксированных средних значениях интенсивности полётов и времени заправки.

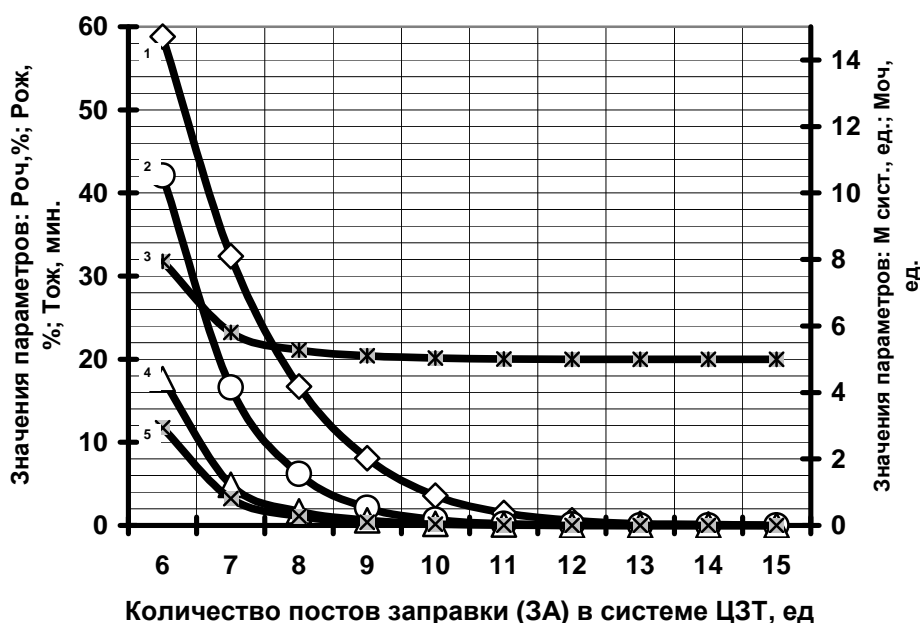


Рис. 2. Зависимость параметров функционирования системы ЦЗТ от количества постов заправки: 1 – вероятность наличия очереди ЛА – $P_{оч.}$, %; 2 – вероятность ожидания ВС заправки в очереди более 10 мин – $P_{ож.}$, %; 3 – среднее число ВС в системе ЦЗТ – $M_{сист.}$, ед.; 4 – среднее время ожидания ВС заправки в очереди – $T_{ож.}$, мин.; 5 – среднее число ВС в очереди – $M_{оч.}$, ед.
Исходные данные: интенсивность вылетов – 10 в час; среднее время заправки одного ВС – 30 мин; допустимое время ожидания в очереди – 10 мин.

Анализ представленных на рис. 2 результатов моделирования показывает, что при числе ЗА в системе ЦЗТ, равном 9 единицам, среднее время простоя ВС в очереди на заправку составляет $\approx 0,6$ минуты; средняя длина очереди $\approx 0,1$ ВС; вероятность ожидания заправки более 10 минут не превышает $\approx 2,1\%$; из 9 ЗА в среднем постоянно заняты $\approx 5,1$ заправочных агрегатов; вероятность образования очереди ВС на заправку составляет $\approx 8,1\%$.

Дальнейшее увеличение числа ЗА уже не существенно влияет на основные параметры, характеризующие эффективность функционирования ЦЗТ, в частности среднее количество ВС, находящихся в системе заправки, остаётся неизменным.

На графиках рис. 3 приведены зависимости основных параметров функционирования ЦЗТ от интенсивности полётов при фиксированных значениях количества ЗА (10 ед.), времени заправки (30 мин.) и допустимого времени ожидания заправки в очереди (10 мин.).

Анализ графиков на рис. 3 предоставляет возможность объективно оценить соответствие выбранного состава ЦЗТ экстремальным условиям эксплуатации во время пиковых нагрузок.

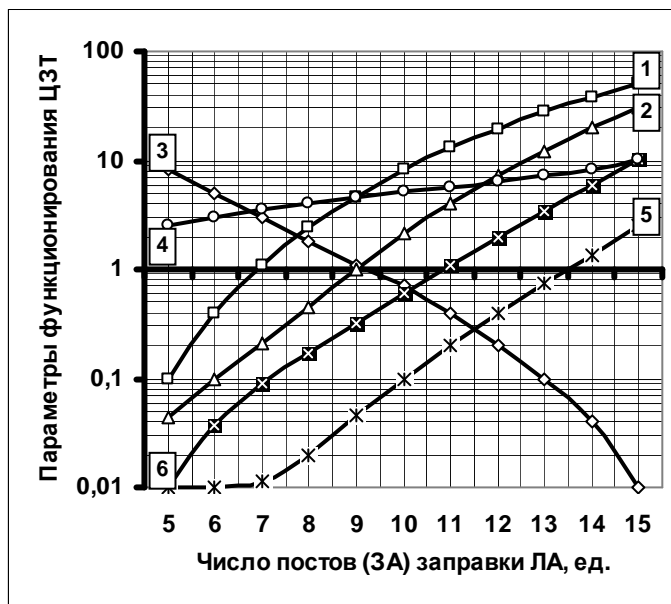


Рис. 3. Зависимость параметров функционирования ЦЗТ

от интенсивности вылетов. 1 – вероятность наличия очереди ВС на заправку – $P_{оч.}$, %; 2 – вероятность ожидания ВС заправки в очереди более 10 мин – $P_{ож.}$; 3 – вероятность простоя всех ЗА – P_0 , %; 4 – среднее число ВС в системе ЦЗТ (заправляемых и в очереди) – M_c , ед.; 5 – среднее число ВС в очереди – $M_{оч.}$, %; 6- среднее время ожидания ВС заправки в очереди, мин.

Исходные данные: количество постов заправки (ЗА)– 9; среднее время заправки одного ВС – 30 мин; допустимое время ожидания заправки в очереди – 10 мин.

На рис. 4 приведены графики зависимости основных параметров функционирования ЦЗТ заданного состава при фиксированной интенсивности вылетов (заправок) от среднего времени заправки одного ВС.

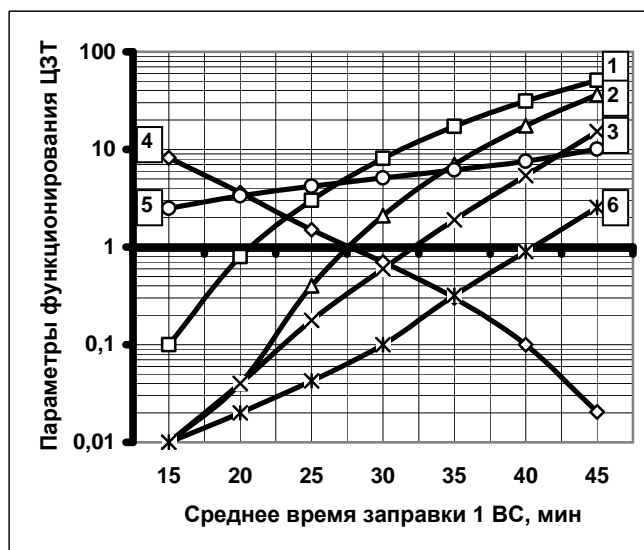


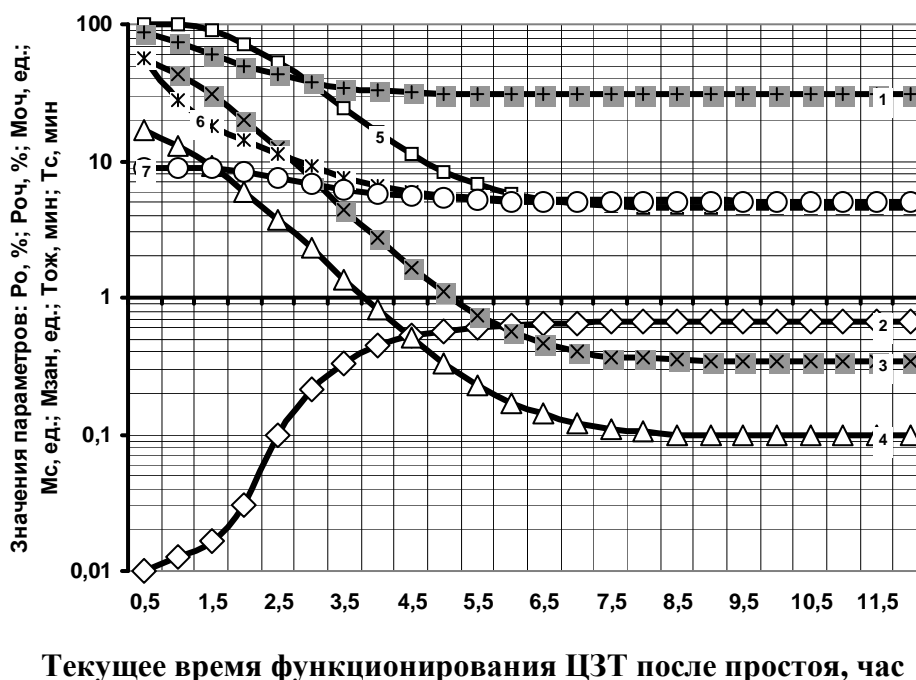
Рис. 4. Зависимость параметров функционирования ЦЗТ от времени заправки одного ВС: 1 – вероятность наличия очереди ВС – $P_{оч.}$, %; 2 – вероятность ожидания ВС заправки в очереди больше 10 мин – $P_{ож.}$, %; 3 – среднее время ожидания ВС заправки в очереди – $T_{ож.}$, мин; 4 – вероятность простоя всех ЗА – P_0 , %; 5 – среднее число ВС в системе ЦЗТ – M_c , ед.; 6 – средняя длина очереди ВС на заправку – $M_{оч.}$, ед.

Исходные данные: количество ЗА– 9; интенсивность вылетов (заправок ВС) – 10 в час; допустимое время ожидания заправки в очереди – 10 мин.

Анализ графиков на рис. 4 даёт возможность оценить влияние увеличения производительности заправки (вплоть до предела приёмной способности топливных баков ВС) и сокращения времени на подготовительные и заключительные операции, на эффективность системы в целом.

Знание вероятностей различных состояний (количества ЛА в системе заправки) позволяют объективно обосновать среднюю производительность перекачки насосной станции (насосных станций) ЦЗТ, а также требования к её максимальной подаче, исходя из минимально допустимого по выбранному критерию риска.

Результаты моделирования переходного процесса функционирования ЦЗТ выбранного состава (9 заправочных агрегатов), при средней интенсивности вылетов (заправок) - 10 в час, времени заправки 1 ВС – 30 минут, после 3^{-x} часового простоя на ремонте (техобслуживании), в течение которого на аэродроме скопилось 30 требующих заправки топливом ВС, представлены на рис. 5. Как следует из графиков в данных условиях выбранная система ЦЗТ выходит на стационарный режим за время ≤ 8 часов.



Текущее время функционирования ЦЗТ после простоя, час

Рис. 5. Характер изменения параметров системы ЦЗТ во времени после остановки на ремонт и обслуживание в течение 3 часов: 1-среднее время пребывания ВС в системе - T_c , мин; 2 – вероятность простоя всех ЗА - P_o , %; 3 – среднее время ожидания ВС в очереди на заправку - $T_{ож}$, мин; 4 – средняя длина очереди ВС на заправку - $M_{оч}$, ед.; 5 – вероятность наличия очереди ВС на заправку - $P_{оч}$, %; 6 – среднее время ожидания ВС в очереди на заправку - $T_{ож.}$, мин; 7 – среднее число ЗА одновременно занятых заправкой ВС - $M_{зан}$, ед.

Исходные данные: количество ЗА в комплекте ЦЗТ – 9 шт.; интенсивность вылетов (заправок) – 10 в час; среднее время заправки 1 ВС – 30 мин; время простоя ЦЗТ на ремонт и техническое обслуживание – 3 часа; длина очереди ВС в начале процесса функционирования ЦЗТ после ремонта – 30 ед.

Таким образом, на основе статистических методов и теории массового обслуживания возможно создание адекватных реальным конкретным объектам моделей функционирования систем авиатопливообеспечения, обеспечивающих решение широкого круга задач.

Применение математических моделей процессов функционирования систем авиатопливообеспечения воздушных перевозок особенно актуально при обосновании выбора вариантов раз-

вития систем заправки воздушных судов и модернизации заправочного оборудования с учётом тенденции роста интенсивности полётов, например в аэропорту Внуково.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андронов А.М., Хижняк А.Н. Математические методы планирования и управления хозяйственной деятельностью предприятий гражданской авиации. – М.: Транспорт, 1970.
2. Гатшин В.Н., Русол В.А., Ликин А.В. Применение методов математической статистики в авиационной практике. – М.: Транспорт, 1993.
3. Кухтерин Е.И. Методика определения расчётной производительности систем централизованной заправки самолётов топливом. – М.: ОНТИ, ГПИ и НИИ ГА, 1970.
4. Кухтерин Е.И. Исследование основных параметров систем централизованной заправки самолётов авиатопливом. – М.: ГПИ и НИИ ГА, 1975.
5. Вентцель Е.С. Исследование операций. – М.: Советское радио, 1972.
6. Абчук В.А., Матвейчук Ф.А., Томашевский Л.П. Справочник по исследованию операций. – М.: Воениздат, 1979.
7. Розенберг В.Я., Прохоров А.И. Что такое теория массового обслуживания? – М.: Советское радио, 1965.

AIRFIELD CENTRALIZED AIRCRAFT FUELING SYSTEM OPERATING PROCESS MATHEMATICAL MODEL

Ivanov A.A., Pirogov J.N., Cirojedov N.E.

Effectiveness evaluation methods and algorithms using analytical model based on the Markov mass service theory mathematical apparatus under stationary and transition conditions is brought forward with the purpose of the centralized aircraft fueling system composition, structure and technical characteristics optimization. The model realization example is given using various initial data concerning fueling points quantity, aircraft taking-off intensity, aircraft refueling time.

Сведения об авторах

Иванов Александр Антонович, 1950 г. р., окончил МГТУ ГА (1979), главный инженер ЗАО «Топливозаправочная компания Внуково», автор 5 научных работ, область научных интересов – авиатопливообеспечение аэропортов, моделирование процессов.

Пирогов Юрий Никитич, 1940 г.р., окончил ВАТТ (1971), МГУ им. Ломоносова (1978), кандидат технических наук, старший научный сотрудник, ведущий научный сотрудник ФГУП «25 ГосНИИ Минобороны России», автор более 100 научных работ, область научных интересов – нефтепродуктообеспечение, исследование операций в технике, математическое моделирование процессов функционирования объектов и технических средств обеспечения топливом.

Сыроедов Николай Евгеньевич, 1935 г.р., окончил КВИАУ ВВС (1961), кандидат технических наук, старший научный сотрудник, ведущий научный сотрудник ФГУП «25 ГосНИИ Минобороны России», доцент кафедры АТО и РЛА МГТУ ГА, автор более 100 научных работ, область научных интересов – авиатопливообеспечение аэропортов, безопасность систем заправки ВС горюче-смазочными материалами.